Analyse numérique non linéaire

Jean-Pierre Croisille

1er mars 2014

Chapitre 1

Calcul d'erreur pour le θ-schéma

1.1 Introduction

On considère l'équation différentielle pour $x(t) \in \mathbb{R}$:

$$x'(t) = f(x(t), t), \quad t \in [0, T], \quad x(0) = x_0, \ x(t) \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

où $x^0 \in \mathbb{R}$ est donné. On suppose que $f \in C^2([0, T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ et qu'elle vérifie la condition suivante:

$$(L) \quad \text{Il existe } L > 0 \text{ tel que } \left|\frac{\partial f}{\partial z}(z, t)\right| \leq L, \quad \forall z \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in [0, T]. \tag{1.2}$$

On considère une subdivision uniforme à $N + 1$ points (donc de pas $h = T/N$) de l'intervalle $[0, T]$.

Pour $\theta \in [0, 1]$ on considère le θ-schéma:

$$(M_\theta) \left\{ \begin{array}{l} x_0 \in \mathbb{R} \text{ donné}, \quad t_n = nh, \quad 0 \leq n \leq N, \\ x_{n+1} = x_n + h\theta f(x_{n+1}, t_{n+1}) + h(1 - \theta) f(x_n, t_n), \quad 0 \leq n \leq N - 1. \end{array} \right. \tag{1.3}$$

où $t_n = nh$, $n \geq 0$.

On considère la fonction

$$f(x, t) = \frac{xt}{1 + t^2}. \tag{1.4}$$

Cette fonction vérifie-t-elle l'hypothèse *(L)* ?

1.2 Questions

Dans le cas où la fonction $f(x, t)$ est donnée par (1.4), exprimer x_{n+1} en fonction de x_n. (On supposera h suffisamment petit).

On considère le cas général. Montrer qu'il existe $h_0 > 0$ tel que, pour tout $0 < h < h_0$ et tout $x_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique suite $(x_n)_{0 \leq n \leq N}$ vérifiant (M_θ). Indiquer une façon dévaluer numériquement x_{n+1} en fonction de x_n.

Soit $x(t)$ la solution du problème (1.1). Pour tout $t \in [0, T - h]$, $0 < h < h_0$, on introduit l'erreur locale de troncature associée au schéma (M_θ)

$$e(h, t) = \frac{x(t + h) - x(t)}{h} - \theta f(x(t + h), t + h) - (1 - \theta) f(x(t), t). \tag{1.5}$$

Déterminer selon les valeurs de θ l'ordre du schéma implicite (M_θ).

Soit $(z_n)_{0\leq n\leq N-1}$ une suite fixée. On considère la suite $(y_n)_{0\leq n\leq N-1}$ donnée, pour tout $0<h<h_0$, par

$$\left\{\begin{array}{l} y_0 \;\in\; \mathbb{R} \text{ donné },\quad 0\leq n\leq N\;, \\ y_{n+1} \;=\; y_n + h\theta f(y_{n+1},t_{n+1}) + h(1-\theta)f(y_n,t_n) + z_n\,, \\ \qquad\qquad 0\leq n\leq N-1\;, \end{array}\right. \tag{1.6}$$

Vérifier que $(y_n)_{0\leq n\leq N-1}$ est bien définie.

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite positive vérifiant

$$u_{n+1}\leq \alpha u_n+\beta,\quad \alpha,\beta\geq 0,\alpha\neq 1. \tag{1.7}$$

Montrer que

$$0\leq u_n\leq u_0\alpha^n+\beta\frac{\alpha^n-1}{\alpha-1}. \tag{1.8}$$

Estimer $|y_n-x_n|$ en fonction de $|y_0-x_0|$ et de $(|z_n|)_{0\leq n\leq N-1}$.

Donner un majorant de l'erreur

$$\max_{0\leq n\leq N-1}|x_n-x(t_n)| \tag{1.9}$$

en fonction de h et $|x_0-x^0|$.

On suppose que $x_0=x^0$, Quel est l'ordre de l'erreur

$$\max_{0\leq n\leq N-1}|x_n-x(t_n)|? \tag{1.10}$$

Chapitre 2

Equation de Stuart-Landau

2.1 Introduction

On considère le système différential complexe (équation de Stuart-Laundau) dont l'inconnue est $W(t) = X_1(t) + iX_2(t)$ avec $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} W'(t) = (1 + ic_0)W(t) - (1 + ic_2)|W(t)|^2 W(t) \\ W(0) = a + ib \end{cases} \tag{2.1}$$

2.2 Questions

1. Exprimer (2.1) sous la forme d'un système différentiel en $X(t) = (X_1(t), X_2(t)) \in \mathbb{R}^2$.

2. Résoudre (2.1) de façon approchée à l'aide du schéma RK4. On utilisera les successivement les 3 conditions initiales $W_0 = 1, W_0 = i, W_0 = 1 + i$. On représentera les portraits de phase dans l'espace (X_1, X_2).

3. Soit $\omega_0 \in \mathbb{R}$. Vérifier que $W_0(t) = \exp(i\omega_0 t)$ est une solution périodique de (2.1) lorsque l'on a $\omega_0 = c_0 - c_2$.

4. On étudie les solutions de la forme $W(t) = W_0(t)(1 + w(t))$, où $w(t)$ représente une "petite perturbation" autour de la solution peériodique $W_0(t)$. Montrer que la fonction $t \mapsto w(t)$ satisfait une équation différentielle de la forme

   $$w'(t) = -(1 + ic_2)(w(t) + \bar{w}(t)) + O(|w(t)|^2) \tag{2.2}$$

   øù $O(|w|^2)$ désigne des termes de l'ordre de $|w|^2$ (ou plus petits).

5. Exprimer l'e.d.o.(2.2) (sans les termes en $O(|w|^2)$ sous la forme d'un système différentiel linéaire en $t \mapsto (\alpha(t), \beta(t)$ avec $w(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$ de la forme

   $$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{bmatrix} = \Lambda \begin{bmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

   où $\Lambda \in \mathbb{M}(\mathbb{R}^2)$ est une matrice que l'on précisera.

6. Donner la solution analytique $w(t)$ de (2.3) en fonction de la condition initiale $w_0(t)$.

7. Tracer sur une même figure la solution calculée par RK4 de (2.1) et la fonction $W_0(t) + w(t)$. On présentera les résultats pour les 3 conditions initiales précédentes.

8. Commenter les résultats obtenus.